Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIII-a
Galaţi, 24 noiembrie 2012

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) $a_n = \sqrt{2012^2 + \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$ 2p

termenii raționali $a_{8046} = 6035$ 1p

$a_{8049} = 6037$ 1p

b) $\det\left(A - \sqrt{2012}\cdot I_2\right)\cdot\det\left(A + \sqrt{2012}\cdot I_2\right) = 0$ 1p

$A^2 = 2012\cdot I_2$ 1p

$A^{2012} = 2012^{1006}\cdot I_2$ 1p

Problema 2

a) Notația $a = |a|\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ şi obținerea relației:

$\left|a - r\cdot\omega^k\right|^2 = |a|^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot|a|\cdot\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n} - \theta\right)$ 1p

$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|a - r\cdot\omega^k\right|^2}{|a|^2 + r^2} = n - \frac{2\cdot r\cdot|a|}{|a|^2 + r^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n} - \theta\right)$.....1p

$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n} - \theta\right) = 0$ şi finalizare: suma este egală cu n 1p

b) Calcul $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, M^3, M^4, etc. 1p

Obținerea ipotezei inductive:

$$M^{2\cdot k} = \begin{pmatrix} F_{2\cdot k} & 0 & F_{2\cdot k+1} & 0 \\ 0 & F_{2\cdot k+2} & 0 & F_{2\cdot k+1} \\ F_{2\cdot k+1} & 0 & F_{2\cdot k+2} & 0 \\ 0 & F_{2\cdot k+1} & 0 & F_{2\cdot k} \end{pmatrix} \text{ şi } M^{2\cdot k+1} = \begin{pmatrix} 0 & F_{2\cdot k+2} & 0 & F_{2\cdot k+1} \\ F_{2\cdot k+2} & 0 & F_{2\cdot k+3} & 0 \\ 0 & F_{2\cdot k+3} & 0 & F_{2\cdot k+2} \\ F_{2\cdot k+1} & 0 & F_{2\cdot k+2} & 0 \end{pmatrix} \text{.....2p}$$

unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este şirul lui Fibonacci dat de $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ şi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

Demonstrația prin inducție a formelor găsite 1p

Problema 3

Calculul primilor termeni:

$$U_0 = 2 = 1+1 = 2^{\frac{2^0-(-1)^0}{3}} + 2^{-\frac{2^0-(-1)^0}{3}}$$

$$U_1 = \frac{5}{2} = 2+\frac{1}{2} = 2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}} + 2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}}$$

$$U_2 = \frac{5}{2} = 2+\frac{1}{2} = 2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}} + 2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}}$$

$$U_3 = \frac{65}{8} = 8+\frac{1}{8} = 2^{\frac{2^3-(-1)^3}{3}} + 2^{-\frac{2^3-(-1)^3}{3}}$$ 1p

Deducerea formei termenului general $U_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ 3p

Demonstrația prin inducție a formulei găsite a termenului general 2p

Finalizare.....1p